

$$\therefore f(x) = \frac{a}{a^2-1}(a^x - a^{-x}) \quad (a>1, x>0; 0<a<1, x<0).$$

点评: 求解函数解析式的几种常用方法主要有待定系数法和换元法. 换元法: 已知 $f(g(x))$ 的表达式, 欲求 $f(x)$, 我们常设 $t=g(x)$, 从而求得 x , 然后代入 $f(g(x))$ 的表达式, 从而得到 $f(t)$ 的表达式, 即为 $f(x)$ 的表达式. 利用函数基础知识, 特别是对“ f ”的理解, 用好等价转化, 注意定义域. 本题对思维能力要求较高, 对定义域的考查、等价转化易出错.

二、求值、求最值、求值域

例 3. 求函数 $y = \cos^2 x + \sin x$ ($|x| \leq \frac{\pi}{4}$) 的最大值与最小值.

解析: 令 $t = \sin x$, $\therefore |x| \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$$\therefore y = -t^2 + t + 1 = -(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{5}{4}, t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } y_{\min} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \text{函数 } y = \cos^2 x + \sin x \quad (|x| \leq \frac{\pi}{4}) \text{ 的最大值为 } \frac{5}{4}, \text{ 最小值为 } \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

点评: 求解三角函数的值域 (最值) 常见到以下几种类型的题目:

① 形如 $y = a \sin x + b \cos x + c$ 的三角函数化为 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + k$ 的形式, 再求最值 (值域);

② 形如 $y = a \sin^2 x + b \sin x + c$ 的三角函数, 可先设 $\sin x = t$, 化为关于 t 的二次函数求值域 (最值);

③ 形如 $y = a \sin x \cos x + b(\sin x \pm \cos x) + c$ 的三角函数, 可先设 $t = \sin x \pm \cos x$, 化为关于 t 的二次函数求值域 (最值).

例 4. 实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$ (①式), 设 $S = x^2 + y^2$, 求 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 的值.

解析: 设 $\begin{cases} x = \sqrt{S} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{S} \sin \alpha \end{cases}$ 代入①式得: $4S - 5S \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 5$,
解得 $S = \frac{10}{8-5\sin 2\alpha}$.

$$\therefore -1 \leq \sin 2\alpha \leq 1, \therefore 3 \leq 8-5\sin 2\alpha \leq 13, \therefore \frac{10}{13} \leq \frac{10}{8-5\sin 2\alpha} \leq \frac{10}{3}.$$

$$\therefore \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{3}{10} + \frac{13}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}.$$

点评: 由 $S = x^2 + y^2$ 联想到 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, 于是进行三角换元, 设 $\begin{cases} x = \sqrt{S} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{S} \sin \alpha \end{cases}$ 代入①式求 $S_{\max}$ 和 $S_{\min}$ 的值. 此种解法后面求 S 最大值和最小值, 还可由 $\sin 2\alpha = \frac{8S-10}{S}$ 的有界性而求,

即解不等式: $|\frac{8S-10}{S}| \leq 1$. 这种方法是求函数值域时经常用到的“有界法”.

另解: 由 $S = x^2 + y^2$, 设 $x^2 = \frac{S}{2} + t, y^2 = \frac{S}{2} - t, t \in [-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}]$,

$$\text{则 } xy = \pm \sqrt{\frac{S^2}{2} - t^2} \text{ 代入①式得: } 4S \pm 5\sqrt{\frac{S^2}{2} - t^2} = 5,$$

移项平方整理得 $100t^2 + 39S^2 - 160S + 100 = 0$.

$$\therefore 39S^2 - 160S + 100 \leq 0, \text{ 解得 } \frac{10}{13} \leq S \leq \frac{10}{3}.$$

$$\therefore \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{3}{10} + \frac{13}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}.$$

点评: 此题第一种解法属于“三角换元法”, 主要是利用已知条件 $S = x^2 + y^2$ 与三角公式 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ 的联系而联想和发现用三角换元, 将代数问题转化为三角函数值域问题. 第二种解法属于“均值换元法”, 主要是由等式 $S = x^2 + y^2$ 而按照均值换元的思路, 设 $x^2 = \frac{S}{2} + t, y^2 = \frac{S}{2} - t$, 减少了元的个数, 问题且容易求解. 另外, 还用到了求值域的几种方法: 有界法、不等式性质法、分离参数法.

和“均值换元法”类似, 我们还有一种换元法, 即在题中有两个变量 x, y 时, 可以设 $x = a+b, y = a-b$, 这称为“和差换元法”, 换元后有可能简化代数式. 本题设 $x = a+b, y = a-b$, 代入①式整理得 $3a^2 + 13b^2 = 5$, 求得 $a^2 \in [0, \frac{5}{3}]$, 所以 $S = (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2) = \frac{10}{13} + \frac{20}{13}a^2 \in [\frac{10}{13}, \frac{10}{3}]$, 再求 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 的值.

例 5. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足: $A + C = 2B$, $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$, 求 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的值.

解析: 由 $\triangle ABC$ 中已知 $A + C = 2B$, 可得 $\begin{cases} A + C = 120^\circ, \\ B = 60^\circ. \end{cases}$

由 $A + C = 120^\circ$, 设 $\begin{cases} A = 60^\circ + \alpha, \\ C = 60^\circ - \alpha, \end{cases}$ 代入已知等式得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} &= \frac{1}{\cos(60^\circ + \alpha)} + \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha} \\ &+ \frac{1}{\frac{1}{2}\cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{4}\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = -2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\text{解得: } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即: } \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

另解: 由 $A + C = 2B$, 得 $A + C = 120^\circ, B = 60^\circ$, 所以 $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B} = -2\sqrt{2}$.

$$\text{设 } \frac{1}{\cos A} = -\sqrt{2} + m, \frac{1}{\cos C} = -\sqrt{2} - m,$$

所以 $\cos A = \frac{1}{-\sqrt{2} + m}, \cos C = \frac{1}{-\sqrt{2} - m}$, 两式分别相加、相减得:

$$\cos A + \cos C = 2\cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{A-C}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{m^2 - 2},$$